12

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
17 decembrie 2022 – Pitești
Clasa a 12 – a

SUBIECTE:

1.Fie $(H_1,*)$ și $(H_2,\circ)$ două grupuri finite de ordin n_1 respectiv n_2. Pe $G = H_1 x H_2$ definim operația $(x_1, x_2) \perp (y_1, y_2) = (x_1 * y_1, x_2 \circ y_2)$ și presupunem cunoscut că $(G, \perp)$ este grup.

a) Arătați că G are ordinul cmmmc $[\,n_1, n_2]$. 2p

b) Deduceți că orice număr natural $n \geq 3$ este exponentul unui grup finit necomutativ. 2p

c) Fie $n \in N, n \geq 2, p \in N$ prim și $k \in N, k \geq 2$ exponentul lui p în descompunerea lui n. Calculați numărul soluțiilor ecuației $x^{\frac{n}{p}} = e$ în grupul $G = Z_{p^{k-1}}\ x\ Z_{\frac{n}{p^{k-1}}}$, e fiind elementul neutru în G. 3p

2.a) Rezolvați în $(\mathbb{Z}_7, \cdot)$ ecuația $x^5 = a^4$, $a \in \mathbb{Z}_7$. 3p

b) Fie $(G, \circ)$ grup cu $5n+1$ elemente, $n \in N^*$. Arătați că ecuația $x^5 = a^4$, $(\forall) a \in G$, are soluție unică în G. 4p

3.Calculați primitivele funcției $f: R \to R, f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^4+2x^2+4x+2}$. 7p

4.Calculați primitivele funcției $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to R,\ f(x) = \frac{x \sin 2022x}{tgx}$ 7p

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
17 decembrie 2022 – Pitești
Clasa a 12 – a

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema1 -Soluție orientativă: **Punctaj**

a) Dacă G grup finit cu n elemente $\Rightarrow (h_1,h_2)^n = (e_1,e_2) \Rightarrow {h_1}^n = e_1, {h_2}^n = e_2$, $(\forall)h_1 \in H_1, (\forall)h_2 \in H_2$. Deci n_1/n și n_2/n. Rezultă $[n_1,n_2]/n$ deci $[n_1,n_2] = n$. **2p**

b)Dacă n = 4 considerăm grupul D_4. **2p**

Dacă $n \neq 2^k, k \in N^*$, fie $G = Z_p x Z_n$, $p \geq 3, p$ prim

Dacă $n = 2^k$, $k \geq 3$ fie $G = D_4 x Z_n$.

c)Fie x=(a,b) ∈ G, $a^{p^{k-1}} = e_1, b^{\overline{\frac{n}{p^{k-1}}}} = e_2$. $p^{k-1}/\frac{n}{p}$ și $\frac{n}{p^{k-1}}/\frac{n}{p}$, $\Rightarrow x^{\frac{n}{p}} = (e_1,e_2) = e$. **3p**

$|G| = n$, deci în total sunt n soluții.

Problema2 -Soluție orientativă: **Punctaj**

a) a∈ $\mathbf{Z}_7$, $a^4 \in \{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}\}$Ecuațiile au soluțiile respectiv $x \in \{\hat{0},\hat{1},\hat{4},\hat{2}\}$ **3p**

b) Dacă G grup finit cu n elemente și m∈ Z, (n,m)=1, funcția f: G ⟶ G, $f(x) = x^m$ este bijectivă. Demonstrație:există p, q ∈ Z cu pn+qm=1. Fie x, y ∈ G cu f(x)=f(y)⟹ $x^m=y^m \Rightarrow x^{qm}=y^{qm} \Rightarrow x^{1-pn}=y^{1-pn} \Rightarrow x\cdot(x^n)^{-p}=y\cdot(y^n)^{-p} \Rightarrow x = y$, folosind proprietățile grupului. Obținem f injectivă, dar G finit conduce la f bijectivă. **2p**

Cum (5,5n+1)=1 ecuația $x^5=a^4$ are soluție unică (∀)a ∈ G. **2p**

Problema 3-Soluție orientativă: **Punctaj**

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x^2+2x+2}{(x^2-1)^2+(2x+1)^2}dx.$$ **2p**

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\left(\frac{x^2-1}{2x+1}\right)'}{\left(\frac{x^2-1}{2x+1}\right)^2+(1)^2}dx.$$ **3p**

Primitivele funcției f sunt $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x^2-1}{2x+1}\right) + c_1, & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x^2-1}{2x+1}\right) + c_2, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right) \end{cases}$. **2p**

Din condiția $\lim\limits_{x\nearrow -\frac{1}{2}} F(x) = \lim\limits_{x\searrow -\frac{1}{2}} F(x)$ obținem $c_2 = c_1 + \frac{\pi}{2}$.

Problema 4-Soluţie orientativă: **Punctaj**

Fie $F_n(x)$o primitivă a funcţiei $\frac{\sin 2nx}{tgx}$, $F_n(x) = \int \frac{\sin 2nx}{tgx} dx$. Atunci $(\forall)n>1$ avem : **3p**

$F_n(x) - F_{n-1}(x) = \int \frac{\sin 2nx - \sin 2(n-1)x}{tgx} dx = \int 2 \frac{\cos x}{\sin x} \sin x \cos(2n-1)x dx$

$= \int 2 \cos x \cos(2n-1)x dx = \int \cos 2nx dx + \int \cos(2n-2)x dx = \frac{1}{2n} \sin 2nx + \frac{1}{2(n-1)} \sin 2(n-1)x$

Adunam aceste relaţii şi obţinem: **2p**

$F_n(x) = \frac{1}{2n} \sin 2nx + 2 \frac{2}{2(n-1)} \sin 2(n-1)x + \ldots + \frac{2}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x$ ţinând seama de $F_2(x) - F_1(x) = \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x$

Acum calculam primitiva dată prin părţi : **2p**

$\int x \frac{\sin 2022x}{tgx} dx = xF'_{1011}(x) - \int F_{1011}(x) dx =$

$= xF_{1011}(x) + \frac{1}{4n^2} \cos 2nx + \frac{2}{4(n-1)^2} \cos 2(n-1)x + \ldots + \frac{2}{4^2} \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 2x$, n=1011.

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

12/02