11

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
17 decembrie 2022 – Pitești
Clasa a 11 – a

SUBIECTE:

1. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$. **(7p)**

2. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_n = \sqrt{\frac{1}{n+1}} + \sqrt{\frac{2}{n+1}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n+1}}$.
Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$. **(7p)**

3. Fie matricele $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + B^2 = AB = BA$.

   a) Dați exemplu de două matrice diferite $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$ care verifică relația din enunț.

   b) Dacă, în plus, $\det(A - B) = 0$, arătați că $A^2 = B^2 = O_2$. **(7p)**

4. Se consideră matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ pentru care $A^3 = A + I_n$. Arătați că $\det A > 0$. **(7p)**

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
17 decembrie 2022 – Pitești
Clasa a 11 – a

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă	**Punctaj**
Fie L = $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}} (\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$. Limita L, prin amplificare cu conjugata $\sqrt[3]{(n+1)^4} + \sqrt[3]{(n^2-1)^2} + \sqrt[3]{(n-1)^4}$ devine :	**1p**
L=$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\frac{4n}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{(n^2-1)^2}+(n-1)\sqrt[3]{n-1}}$	**2p**
Utilizând factorul forțat obținem L=$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n\sqrt[3]{n}}{n\sqrt[3]{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+n\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2}+n\sqrt[3]{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}}$	**2p**
După simplificare, folosind $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, obținem L=$\frac{4}{3}$.	**2p**

Problema 2: soluție orientativă	**Punctaj**
Definim șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ prin b_n=$\sqrt{1}+\sqrt{2}$+...+$\sqrt{n}$ și notăm L=$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$.	**1p**
Avem $a_n=\frac{b_n}{\sqrt{n+1}}$ și L=$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b_n+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}-\frac{b_n}{\sqrt{n+1}}\right)$=1-$\lim\limits_{n\to\infty} b_n\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+2)(n+1)}}$=1-$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{(n+2)\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n+2}}$.	**2p**
Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{(n+2)\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right]}=\frac{1}{2}$	**1p**
Atunci L = 1-$\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n\sqrt{n}}$.	**1p**
Utilizând lema Stolz-Césaro, avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}=\frac{2}{3}$ și atunci L = 1-$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$.	**2p**

Problema 3: soluție orientativă	**Punctaj**
a) Un exemplu este $A=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$.	**2p**

b) Cum $A^2 = (A - B) \cdot B \Rightarrow (\det A)^2 = \det B \cdot \det(A - B) = 0$. Analog se arată că $\det B = 0$. Folosind relația $\det(A + B) + \det(A - B) = 2 \cdot (\det A + \det B)$ și ținând cont că $\det(A - B) = \det A = \det B = 0 \Rightarrow \det(A + B) = 0$.	**1p**
Folosind relația lui Hamilton-Cayley, obținem: $(A+B)^2 = Tr(A+B)\cdot(A+B) - \det(A+B)\cdot I_2 \Rightarrow (A+B)^2 = Tr(A+B)\cdot(A+B) \Rightarrow$ $(A + B)^2 = (TrA + TrB)(A + B) = TrA \cdot A + TrA \cdot B + TrB \cdot A + TrB \cdot B$. Analog avem: $(A - B)^2 = (TrA - TrB)(A - B) = TrA \cdot A - TrA \cdot B - TrB \cdot A + TrB \cdot B$. Scăzând cele două relații, obținem $(A + B)^2 - (A - B)^2 = 2 \cdot (TrA \cdot B + TrB \cdot A)$.	**1p**
De asemenea, din relația din enunț obținem că $(A + B)^2 = 3 \cdot AB$ și $(A - B)^2 = -AB$. Tinând cont de cele de mai sus obținem $4 \cdot AB = 2 \cdot (TrA \cdot B + TrB \cdot A)$ și trecând la urmă, obținem $Tr(AB) = TrA \cdot TrB$. (1)	**1p**
De asemenea din $(A - B)^2 = (TrA - TrB)(A - B)$ și $(A - B)^2 = -AB$, obținem că $-AB = (TrA - TrB)(A - B)$ și trecând la urmă obținem că $-Tr(AB) = (TrA - TrB)^2$ (2)	**1p**
Din (1) și (2), obținem că $(TrA - TrB)^2 = -TrA \cdot TrB \Leftrightarrow (TrA)^2 + (TrB)^2 = TrA \cdot TrB$ și cum $TrA,\ TrB \in R \Rightarrow TrA = TrB = 0$. Folosind Hamilton avem: $A^2 = TrA \cdot A - \det A \cdot I_2,\ B^2 = TrB \cdot B - \det B \cdot I_2$, $TrA = TrB = 0$ și $\det A = \det B = 0 \Rightarrow A^2 = B^2 = O_2$.	**1p**

Problema 4: soluție orientativă	**Punctaj**
Avem $A^3 = A + I_n \Rightarrow A^3 - I_n = A \Leftrightarrow (A - I_n)(A^2 + A + I_n) = A$	**1p**
Avem $A^2 + A + I_n = \left(A + \frac{1}{2}I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ și știm că $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ pentru orice $A, B \in M_n(\mathbf{R})$, cu proprietatea $AB=BA$, deci $\det(A^2 + A + I_n) \geq 0$.	**2p**
Cum $(A - I_n)(A^2 + A + I_n) = A \Rightarrow \det(A - I_n) \cdot \det(A^2 + A + I_n) = \det A$ și cum $\det(A^2 + A + I_n) \geq 0$, rezultă că $\det(A - I_n)$ și $\det A$ au același semn sau sunt nule.	**1p**
Din ipoteză $A^3 = A + I_n \Rightarrow A^3 - A = I_n \Leftrightarrow A(A - I_n)(A + I_n) = I_n$ și de aici rezultă $\det A \cdot \det(A - I_n) \cdot \det(A + I_n) = 1$ (1)	**1p**
Cum $\det A$ și $\det(A - I_n)$ au același semn , din relația (1) rezultă că $\det(A + I_n) > 0$ (2)	**1p**
Avem $A^3 = A + I_n \Rightarrow \det A^3 = \det(A + I_n) \Leftrightarrow (\det A)^3 = \det(A + I_n)$ și din (2) rezultă $\det A > 0$.	**1p**

11/VI