10

Concursul Judeţean de matematică „Dan Barbilian”
17 decembrie 2022 – Piteşti
Clasa a 10 – a

SUBIECTE:

1) Fie $a, b, c > 1$. Arătați că
$a^{log_b a} + b^{log_c b} + c^{log_a c} \geq a^{\sqrt{log_b a}} + b^{\sqrt{log_c b}} + c^{\sqrt{log_a c}} \geq a + b + c.$

(7p)

2) Fie $x \epsilon R$ astfel încât $49^x + 49^{-x} = 23$.

A) Arătați că $7^x + 7^{-x} = 5$ **(3p)**

B) Calculați $\sqrt{7}^x + \sqrt{7}^{-x}$ **(2p)**

C) Determinați $343^x + 343^{-x}$. **(2p)**

3) Fie ecuația $z^2 + mz + \frac{1}{3}(a^2 + ma + m^2) = 0$, unde $m, a \epsilon R$. Dacă z_1, z_2 sunt rădăcinile acestei ecuații, să se arate că z_1, z_2, a sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

(7p)

4) Să se arate că expresia de mai jos este număr natural:

$log_a(bc) log_b(ac) log_c(ab) - log_a(bc) - log_b(ac) - log_c(ab) + log_{abc} a + log_{abc} b + log_{abc} c,$
$unde\ a, b, c \epsilon (0; +\infty) - \{1\}.$

(7p)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
*Timp de lucru: **3 ore**.*

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
17 decembrie 2022 – Pitești
Clasa a 10 – a

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă	**Punctaj**
Fie $a, b, c > 1$. Arătați că $a^{\log_b a} + b^{\log_c b} + c^{\log_a c} \ge a^{\sqrt{\log_b a}} + b^{\sqrt{\log_c b}} + c^{\sqrt{\log_a c}} \ge a + b + c$. Gazeta Matematică nr.9/2022 $\sqrt{\ln a} = x, \sqrt{\ln b} = y, \sqrt{\ln c} = z$ $\log_a b = \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{x^2}{y^2}$, ș.a	**1p**
$a^{\log_b a} = e^{\ln a^{\log_b a}} = e^{\log_b a \ln a} = e^{\frac{\ln a}{\ln b}\ln a} = e^{\frac{\ln^2 a}{\ln b}} = e^{\frac{x^4}{y^2}}$ ș.a. $a^{\sqrt{\log_b a}} = e^{\ln a^{\sqrt{\log_b a}}} = e^{\ln a\sqrt{\frac{\ln a}{\ln b}}} = e^{\sqrt{\frac{\ln^3 a}{\ln b}}} = e^{\frac{x^3}{y}}$	**1p**
Inegalitatea cerută este echivalentă cu : $e^{\frac{x^4}{y^2}} + e^{\frac{y^4}{z^2}} + e^{\frac{z^4}{x^2}} \ge e^{\frac{x^3}{y}} + e^{\frac{y^3}{z}} + e^{\frac{z^3}{x}} \ge e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2}$	**1p**
$e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} = e^{\ln a} + e^{\ln b} + e^{\ln c} = a + b + c$	**1p**
Aplicăm inegalitatea mediilor (ponderate) $m_{ap} \ge m_{gp} \Leftrightarrow \frac{na+mb+pc}{n+m+p} \ge \sqrt[n+m+p]{a^n b^m c^p}$	**1p**
$\frac{11e^{\frac{x^4}{y^2}}+2e^{\frac{y^4}{z^2}}+e^{\frac{z^4}{x^2}}}{14} \ge \sqrt[14]{e^{11\frac{x^4}{y^2}} \cdot e^{2\frac{y^4}{z^2}} \cdot e^{\frac{z^4}{x^2}}} \Leftrightarrow 11e^{\frac{x^4}{y^2}} + 2e^{\frac{y^4}{z^2}} + e^{\frac{z^4}{x^2}} \ge 14\sqrt[14]{e^{11\frac{x^4}{y^2}+\frac{y^4}{z^2}+\frac{z^4}{x^2}}} \ge$ $\ge 14\sqrt[14]{e^{14\sqrt[14]{\frac{x^{44}}{y^{22}}\cdot\frac{y^8}{z^4}\cdot\frac{z^4}{x^2}}}} = 14\sqrt[14]{e^{14\sqrt[14]{\frac{x^{42}}{y^{14}}}}} = 14\sqrt[14]{e^{14\frac{x^3}{y}}} = 14e^{\frac{x^3}{y}} =>$ $11e^{\frac{x^4}{y^2}} + 2e^{\frac{y^4}{z^2}} + e^{\frac{z^4}{x^2}} \ge 14e^{\frac{x^3}{y}}$ Analog, $e^{\frac{x^4}{y^2}} + 11e^{\frac{y^4}{z^2}} + 2e^{\frac{z^4}{x^2}} \ge 14e^{\frac{y^3}{z}}$ $2e^{\frac{x^4}{y^2}} + e^{\frac{y^4}{z^2}} + 11e^{\frac{z^4}{x^2}} \ge 14e^{\frac{z^3}{x}}$ Adunând aceste 3 relații și împățind prin 14 obținem $e^{\frac{x^4}{y^2}} + e^{\frac{y^4}{z^2}} + e^{\frac{z^4}{x^2}} \ge e^{\frac{x^3}{y}} + e^{\frac{y^3}{z}} + e^{\frac{z^3}{x}}$ *(prima inegalitate)*	**1p**
Luând p=1, n=3, m=9 se obține:	**1p**

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Pitești, Jud. Argeș,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

$9e^{\frac{x^3}{y}}+3e^{\frac{y^3}{z}}+e^{\frac{z^3}{x}}\geq 13e^{x^2}$ $e^{\frac{x^3}{y}}+9e^{\frac{y^3}{z}}+3e^{\frac{z^3}{x}}\geq 13e^{y^2}$ $3e^{\frac{x^3}{y}}+e^{\frac{y^3}{z}}+9e^{\frac{z^3}{x}}\geq 13e^{z^2}$ Adunând aceste 3 relații și împărțind prin 13 obținem : $e^{\frac{x^3}{y}}+e^{\frac{y^3}{z}}+e^{\frac{z^3}{x}}\geq e^{x^2}+e^{y^2}+e^{z^2}$ =a+b+c cu egalitate când a=b=c	

Problema 2: soluție orientativă	**Punctaj**
a) $(7^x+7^{-x})^2=7^{2x}+7^{-2x}+2\cdot 7^x7^{-x}=49^x+49^{-x}+2=23+2=25$	1p
$7^x+7^{-x}=\pm 5$	1p
Finalizare	1p
b) $(\sqrt{7}^x+\sqrt{7}^{-x})^2=7^x+7^{-x}+2=5+2=7$	1p
$\sqrt{7}^x+\sqrt{7}^{-x}=\sqrt{7}$	1p
c) $343^x+343^{-x}=7^{3x}+7^{-3x}=(7^x+7^{-x})(7^{2x}-1+7^{-2x})=$ $=(7^x+7^{-x})(49^x+49^{-x}-1)$	1p
$343^x+343^{-x}=5\cdot 22=110$	1p

Problema 3: soluție orientativă	**Punctaj**
$z^2+mz+\frac{1}{3}(a^2+ma+m^2)=0 \Rightarrow \Delta=\frac{-(2a+m)^2}{3}$	1p
$z_1=\frac{-m-\frac{2a+m}{\sqrt{3}}i}{2}=\frac{-m\sqrt{3}-(2a+m)i}{2\sqrt{3}}$	1p
$z_2=\frac{-m\sqrt{3}+(2a+m)i}{2\sqrt{3}}$	1p
$\lvert z_1-z_2\rvert=\left\lvert\frac{(2a+m)i}{\sqrt{3}}\right\rvert=\frac{\lvert 2a+m\rvert\cdot\lvert i\rvert}{\sqrt{3}}=\frac{\lvert 2a+m\rvert}{\sqrt{3}}$	1p
$\lvert z_1-a\rvert=\left\lvert\frac{-m\sqrt{3}-2ai-mi-2a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right\rvert=\left\lvert\frac{-(2a+m)(\sqrt{3}+i)}{2\sqrt{3}}\right\rvert$ $=\frac{\lvert 2a+m\rvert\cdot\lvert\sqrt{3}+i\rvert}{2\sqrt{3}}=\frac{\lvert 2a+m\rvert}{\sqrt{3}}$	1p

$\|z_2-a\| = \left\|\frac{-m\sqrt{3}+2ai+mi-2a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right\| = \left\|\frac{-(2a+m)(-\sqrt{3}+i)}{2\sqrt{3}}\right\| = \frac{\|2a+m\|\cdot\|-\sqrt{3}+i\|}{2\sqrt{3}} = \frac{\|2a+m\|}{\sqrt{3}}$	1p
$\|z_1-a\| = \|z_2-a\| = \|z_1-z_2\| = \frac{\|2a+m\|}{\sqrt{3}}$ => z_1, z_2, a sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral	1p

Problema 4: soluție orientativă	**Punctaj**
E= $log_a(bc)log_b(ac)log_c(ab) - log_a(bc) - log_b(ac) - log_c(ab) + log_{abc}a + log_{abc}b + log_{abc}c\epsilon N,\ unde\ a,b,c\epsilon(0;+\infty)-\{1\}$. Notăm $n = log_a b; p = log_a c$ $x = log_a(bc) = log_a b + log_a c = n + p$	1p
$y = log_b(ac) = \frac{1+p}{n}$	1p
$z = log_c(ab) = \frac{1+n}{p}$	1p
$E = xyz$-x-y-z+$log_{abc}abc = xyz - x - y - z + 1$	1p
xyz-x-y-z=$(n+p)\frac{1+p}{n}\cdot\frac{1+n}{p} - (n+p) - \frac{1+p}{n} - \frac{1+n}{p} = \frac{(n+p)[(1+p)(1+n)-np]-p(1+p)-n(1+n)}{np} =$	1p
$= \frac{(n+p)(1+n+p)-(n+p)-p^2-n^2}{np} = \frac{(n+p)^2-n^2-p^2}{np} = \frac{2np}{np} = 2$	1p
E=2+1=3ϵN	1p

10/V2