8

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
17 decembrie 2022 – Pitești

Clasa a 8 – a

SUBIECTE:

1. Rezolvați în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația $4x^2 - y^2 + 2(x^2y^2 - 1) = 2022$

(7 p)

2. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a < b$ și numărul $x = \left(\sqrt{a + b^2} - b\right)^2$. Arătați că x este un număr irațional din intervalul $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

(7 p)

3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Pe muchiile BB' și CC' considerăm punctele M și N astfel încât suma $AM + MN + ND'$ să fie minimă. Dacă $MN = 2\sqrt{10}$ cm, calculați sinusul unghiului determinat de dreptele MN și AD'.

(7 p)

4. $ABCDA'B'C'D'$ este un cub, iar V un punct în interiorul pătratului $A'B'C'D'$. Fie G_1, G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor VAB, respectiv VBC, iar P și R două puncte pe segmentele VA, respectiv VC. Demonstrați că $PR \parallel (ABC)$ dacă și numai dacă PG_1, VB și RG_2 sunt concurente.

(7 p)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
*Timp de lucru: **3 ore**.*

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
17 decembrie 2022 – Pitești
Clasa a 8 – a

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă	**Punctaj**
$4x^2 - y^2 + 2(x^2y^2 - 1) = 2022 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x^2y^2 - y^2 - 2 = 2022$ $\Leftrightarrow 2x^2(2 + y^2) - (2 + y^2) = 2022 \Leftrightarrow (2x^2 - 1)(y^2 + 2) = 2022$	**3p**
$2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$	**1p**
Prin analizarea tuturor cazurilor, obținem $\begin{cases} \lvert x\rvert = 13 \\ \lvert y\rvert = 2 \end{cases}$	**2p**
Mulțimea soluțiilor este $\{(-13; -2); (-13; 2); (13; -2); (13; 2)\}$.	**1p**

Problema 2: soluție orientativă	**Punctaj**
$b^2 < a + b^2 < b + b^2 < b^2 + 2b + 1 \Rightarrow b^2 < a + b^2 < (b+1)^2$	**1p**
Deci $\sqrt{a+b^2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	**1p**
Presupunem că $x \in \mathbb{Q}$. $x = a + 2b^2 - 2b\sqrt{a+b^2} \Rightarrow \sqrt{a+b^2} = \frac{x-b^2-a}{2b} \in \mathbb{Q}$	**1p**
Contradicție! Deci $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	**1p**
$\left(\sqrt{a+b^2} - b\right)^2 > 0 \Rightarrow a + 2b^2 - 2b\sqrt{a+b^2} > 0 \Rightarrow 2b\sqrt{a+b^2} < a + 2b^2 < b + 2b^2$	**1p**
$\sqrt{a+b^2} < b + \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{a+b^2} - b < \frac{1}{2}$. Cum $\sqrt{a+b^2} - b > 0 \Rightarrow \left(\sqrt{a+b^2} - b\right)^2 < \frac{1}{4}$	**1p**
Deci $0 < x < \frac{1}{4}$, așadar x este un număr irațional din intervalul $\left(0, \frac{1}{4}\right)$	**1p**

Problema 3: soluție orientativă	**Punctaj**
$AD' \parallel BC' \Rightarrow \sin\sphericalangle(MN, AD') = \sin\sphericalangle(MN, BC')$	**1p**
Desfășurăm în plan fețele $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$. În această desfășurare $AM + MN + ND'$ este minimă dacă punctele A, M, N, D' sunt coliniare.	**1p**
M mijlocul lui AN, N mijlocul lui $MD' \Rightarrow AM \equiv MN \equiv ND'$	**1p**
Deci $AD' = 3MN = 6\sqrt{10}$ cm. Fie $AA' = x \Rightarrow A'D' = 3x$. $\Delta A'AD$ dreptunghic în $A' \xrightarrow{T.Pitagora} x^2 + 9x^2 = (6\sqrt{10})^2 \Rightarrow x = 6$	**1p**
$AB' \parallel BC' \Rightarrow \sin\sphericalangle(MN, BC') = \sin\sphericalangle B'AD'$	**1p**
$\mathcal{A}_{AB'D'} = \dfrac{B'D' \cdot AA'}{2} = 36\ cm^2 = \dfrac{AB' \cdot AD' \cdot \sin B'AD'}{2}$	**1p**
$\sin\sphericalangle B'AD' = \dfrac{72}{6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$	**1p**

Problema 4: soluție orientativă	**Punctaj**
Fie M mijlocul lui VB. G_1 centrul de greutate al $\Delta VAB \Rightarrow \frac{AG_1}{G_1M} = 2$	**1p**

Fie $PG_1 \cap VB = \{X_1\}$. În $\Delta VAM, P, G_1, X_1$ coliniare $\xRightarrow{Menelaus} \frac{VP}{PA} \cdot \frac{AG_1}{G_1M} \cdot \frac{MX_1}{X_1V} = 1 \Rightarrow \frac{MX_1}{X_1V} = \frac{PA}{2VP}$	**2p**
Analog, fie $RG_2 \cap VB = \{X_2\} \Rightarrow \frac{MX_2}{X_2V} = \frac{RC}{2VR}$	**2p**
PG_1, VB, RG_2 concurente $\Leftrightarrow X_1 = X_2 \Leftrightarrow \frac{MX_1}{X_1V} = \frac{MX_2}{X_2V} \Leftrightarrow \frac{PA}{2VP} = \frac{RC}{2VR} \Leftrightarrow \frac{VP}{PA} = \frac{VR}{RC}$	**2p**
$\Leftrightarrow PR \parallel AC \xLeftrightarrow{AC \subset (ABC)} PR \parallel (ABC)$	**1p**