7

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
17 decembrie 2022 – Pitești
Clasa a 7 – a

SUBIECTE:

1. a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care:

$$\frac{\sqrt{2^{1980}-2^{1979}-2^{1978}\ldots-2^{1002}}-\sqrt{4+2^2+2^3+\ldots+2^{999}}}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{32^{200}(x^2-1)}.$$

(3p)

b) Se consideră numerele reale $a=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{8}\right)^2}+\left(|2^{123}-3^{82}|+2^{123}\right):3^{81}$ și $b=\frac{60}{7}\cdot\left(\frac{6+5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}-\frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{6-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}-\frac{4-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)-6$. Calculați $(a+b)^{2022}$. **(4p)**

2. Fie $ABCD$ și $EFGH$ două pătrate cu interioarele disjuncte, astfel încât $AB=EF$, C este mijlocul segmentului EF și B,F,G sunt coliniare. Dreapta BC taie EH în K, dreapta AC taie GH în M, punctul L este mijlocul segmentului GH, iar paralela din K la GH taie FG în N.

a) Arătați că $CK=CL=CN$. **(3p)**

b) Arătați că $LM=2\cdot HK$. **(4p)**

3. Fie triunghiul isoscel ABC cu $\sphericalangle BAC=120^0$. În exteriorul triunghiului ABC se construiește triunghiul obtuzunghic isoscel ABE de bază AB. Punctul M este mijlocul segmentului AB, F este simetricul lui M față de BC, N punctul de intersecție dintre dreptele MF și BC, iar P punctul de intersecție al dreptelor AF și BC. Arătați că aria patrulaterului $AEBP$ este egală cu $EP\cdot AT$, unde AT reprezintă înălțimea din A a triunghiului ABC. **(7p)**

4. Fie $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_9$, nouă numere naturale prime, distincte două câte două și $S={p_1}^2+{p_2}^2+\ldots+{p_9}^2$. Dacă mulțimea $A=\{S-{p_1}^2,\ S-{p_2}^2,\ S-{p_3}^2,\ \ldots,S-{p_9}^2\}$ conține cel puțin un număr natural pătrat perfect, arătați că $\sqrt{S}$ este un număr irațional. **(7p)**

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
*Timp de lucru: **3 ore**.*

V2

Concursul Judeţean de matematică „Dan Barbilian”
17 decembrie 2022 – Piteşti
Clasa a 7 – a

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă	Punctaj
a) Impunem condiția $x^2-1>0$ (1). Atunci $\sqrt{2^{1980}-(2^{1979}+2^{1978}+\ldots+2^{1002})}=\sqrt{2^{1980}-(2^{1980}-2^{1002})}=2^{501}$	1p
$\sqrt{4+2^2+2^3+\ldots+2^{999}}=\sqrt{4+2^{1000}-4}=2^{500}$	1p
Obținem $2^{501}-2^{500}=32^{100}\cdot(x^2-1)\Rightarrow x^2-1=2^{500}:2^{500}\Rightarrow x\in\{\pm\sqrt{2}\}$, care verifică (1)	1p
b) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{8})^2}=\|1-\sqrt{2}\|+\|3-\sqrt{8}\|=2-\sqrt{2}$	1p
$(\|2^{123}-3^{82}\|+2^{123}):3^{81}=3\Rightarrow a=5-\sqrt{2}.$	1p
$\frac{6+5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}-\frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{7}{10\sqrt{2}}$	1p
$\frac{6-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}-\frac{4-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{6}\Rightarrow b=\frac{60}{7}\cdot\frac{7}{10\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{6}-6=\sqrt{2}-6\Rightarrow(a+b)^{2022}=(-1)^{2022}=1$	1p

Problema 2: soluție orientativă	Punctaj
a) Din construcție reiese că $EFNK$ este dreptunghi, de unde $\triangle KEC\equiv\triangle NFC$, deci $CK=CN$.	1p
În $\triangle BFC$ avem $BF\perp CF$ și $CF=\frac{1}{2}BC$, ceea ce implică $\sphericalangle FBC=30^0$.	1p
Deducem $\sphericalangle EKC=30^0$, deci $CK=2CE=CL$.	1p
b) Avem $\sphericalangle KCM=\sphericalangle ACB=45^0$ și $\sphericalangle KCL=\sphericalangle EKC=30^0$, deci $\sphericalangle LCM=15^0$.	1p
Cum $\sphericalangle LCN=\sphericalangle LCK=30^0$, deducem $\sphericalangle MCL=\sphericalangle MCN$.	1p
Apoi $\triangle MCL\equiv\triangle MCN$, deci $ML=MN$.	1p
Mai departe $\sphericalangle CMN=\sphericalangle CML=75^0$ implică $\sphericalangle NMG=30^0$, de unde $LM=MN=2\cdot GN=2\cdot HK$.	1p

Problema 3: soluție orientativă	Punctaj
$\triangle MNB\equiv\triangle FNB\Rightarrow MB\equiv FB$ și cum $\sphericalangle ABC=30^0$, atunci $MB\equiv FB\equiv MF$	1p
În $\triangle ABF$, $AM\equiv BM\equiv FM\Rightarrow\sphericalangle AFB=90^0$ și $\sphericalangle BAF=30^0$	1p
În $\triangle ABP$, $\sphericalangle ABP=\sphericalangle BAP=30^0$ și cum $AM\equiv BM\Rightarrow MP\perp AB$ (1)	1p
În $\triangle ABE$, $AE\equiv BE$ și $AM\equiv BM\Rightarrow EM\perp AB$ (2)	1p
Din (1) și (2), obținem că punctele E, M, P sunt coliniare.	1p
$A_{AEBP}=\frac{EP\cdot AB}{2}=\frac{EP\cdot AC}{2}$	1p
În $\triangle ATC$, cu $T\sphericalangle 30^0\Rightarrow AC=2\cdot AT\Rightarrow A_{AEBP}=EP\cdot AT$	1p

Problema 4: soluție orientativă	**Punctaj**
Arătăm că unul dintre numerele $p_1,\ p_2,\ \ldots, p_9$ este 3	**1p**
Prespunem că niciunul dintre numerele $p_1,\ p_2,\ \ldots, p_9$ nu este 3, atunci $p_i = M_3 + 1$ sau $M_3 + 2$, oricare ar fi $i \in \{1,2,3,\ldots,9\}$	**1p**
Obținem că $p_i{}^2 = M_3 + 1$, oricare ar fi $i \in \{1,2,3,\ldots,9\}$.	**1p**
Atunci $S = (M_3 + 1) + (M_3 + 1) + \ldots + (M_3 + 1) = M_3$	**1p**
Atunci $S - p_i{}^2 = M_3 - (M_3 + 1) \Rightarrow S - p_i{}^2 = M_3 + 2$, oricare ar fi $i \in \{1,2,3,\ldots,9\}$, în contradicție cu faptul că în mulțimea A există cel puțin un pătrat perfect.	**1p**
Astfel printre numerele $p_1,\ p_2,\ \ldots, p_9$ se află numărul prim 3 și cum $p_1,\ p_2,\ \ldots, p_9$ sunt distincte două câte două, atunci exact unul dintre numerele $p_1,\ p_2,\ \ldots, p_9$ este 3.	**1p**
Atunci $S = M_3 + (M_3 + 1) + (M_3 + 1) + \ldots + (M_3 + 1) = M_3 + 2 \Rightarrow S$ nu este pătrat perfect, deci $\sqrt{S}$ este un număr irațional.	**1p**

7/OV2