

6

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
17 decembrie 2022 – Pitești
Clasa a VI – a

**SUBIECTE:**

1. a) Arătați că numărul $a = 13 \cdot \left(\frac{143}{144}\right)^n : \frac{11^n \cdot 13^{n+1} + 13^{n+2} \cdot 121^n}{12^{2n} + 13 \cdot 1584^n}$ este număr natural. (4p)

b) Știind că x și y sunt numere naturale pentru care $17 \cdot x + 71 \cdot y$ este număr natural impar demonstrați că numerele $x \cdot y$ și $(x + 2022) \cdot 2023 \cdot (y + 2024)$ sunt numere naturale pare. (3p)

2. Determină numerele naturale a, b ($a < b$) pentru care are loc relația
 $3[a; b] + 5(a; b) = 123$

(7p)

3. Semidreptele OB, OC, OD, OE sunt situate în același semiplan față de dreapta OA , astfel încât $\sphericalangle AOB < \sphericalangle AOC < \sphericalangle AOD < \sphericalangle AOE$.

Știm că $\sphericalangle BOC = 50\%$ din $\sphericalangle AOB = 20\%$ din $\sphericalangle AOD = 16, (6)\%$ din $\sphericalangle AOE$.

a) Arătați că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$; (3p)

b) Dacă în plus, $\sphericalangle BOD = 90^\circ$, arătați că $\sphericalangle AOC$ este unghi drept; (2p)

c) Dacă în plus, $\sphericalangle BOD = 90^\circ$, determinați măsura unghiului MOE , unde OM este bisectoarea unghiului BOC . (2p)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.

Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.

Timp de lucru: 2 ore.

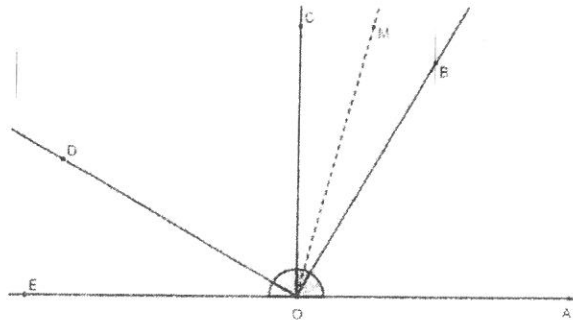
Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
17 decembrie 2022 – Pitești
Clasa a VI – a

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă	Punctaj
a) $a = 13 \cdot \left(\frac{143}{144}\right)^n : \frac{11^n \cdot 13^{n+1}(1+13 \cdot 11^n)}{12^{2n}(1+13 \cdot 11^n)}$	2p
$a = 13 \cdot \frac{11^n \cdot 13^n}{12^{2n}} \cdot \frac{12^{2n}}{11^n \cdot 13^{n+1}}$	1p
$a = 1$, număr natural	1p
b) $17x + 71y$ nr impar $\Rightarrow x$ și y au parități diferite $\Rightarrow x \cdot y$ este număr par	1p
x este număr par $\Rightarrow x + 2022$ este număr par $\Rightarrow (x + 2022) \cdot 2023 \cdot (y + 2024)$ număr par	1p
y este număr par $\Rightarrow y + 2024$ este număr par $\Rightarrow (x + 2022) \cdot 2023 \cdot (y + 2024)$ număr par	1p

Problema 2: soluție orientativă	Punctaj
Notăm $(a; b) = d$, atunci $a = d \cdot x$, $b = d \cdot y$; $(x, y) = 1$, $x, y \in \mathbb{N}^*$ și $3dxy + 5d = 123$	2p
Obținem $3 \mid d \Rightarrow d = 3k$, $k \in \mathbb{N}^*$ și $k(3xy + 5) = 41$	2p
Cum $3xy + 5 > 1 \Rightarrow k \neq 41$ și $k = 1$	1p
Deci, $d = 3$ și $3xy = 36$, deci $xy = 12$. Cum $(x, y) = 1$, obținem perechile $(x; y) \in \{(1; 12), (3; 4)\}$ și $(a; b) \in \{(3; 36), (9; 12)\}$	2p

Problema 3: soluție orientativă	Punctaj
a) $\sphericalangle BOC = \frac{\sphericalangle AOB}{2} = \frac{\sphericalangle AOD}{5} = \frac{\sphericalangle AOE}{6} \Rightarrow \sphericalangle AOB = 2\sphericalangle BOC$; $\sphericalangle AOD = 5\sphericalangle BOC$; $\sphericalangle AOE = 6\sphericalangle BOC$	2p
$\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 3\sphericalangle BOC$; $\sphericalangle COD = \sphericalangle AOD - \sphericalangle AOC = 2\sphericalangle BOC \Rightarrow \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$	1p
b) $\sphericalangle BOD = \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = 3\sphericalangle BOC = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle BOC = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOC = 90^\circ$ (unghi drept)	2p
c) OM bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC \Rightarrow \sphericalangle BOM = \sphericalangle MOC = 15^\circ$	1p
$\sphericalangle AOM = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOM = 75^\circ$ $\sphericalangle AOE = 6\sphericalangle BOC = 180^\circ$ $\sphericalangle MOE = \sphericalangle AOE - \sphericalangle AOM = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$	1p



Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

6/0/2