**5**

# Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
## 17 decembrie 2022 – Pitești
## Clasa a 5 – a

**SUBIECTE:**

**1. Fie** $a = 2^{12n} + 4^{6n+2} + 8^{4n+1}, n \in \mathbb{N}^*$ .

**a) Determinați cel mai mic număr natural nenul** $p, p \geq 2$, **pentru care** $a \cdot p$ **este pătrat perfect.** **(5p)**

**b) Determinați cel mai mic număr natural nenul** $q$, **pentru care** $a \cdot q$ **este cub perfect.** **(2p)**

**2. În grădina bunicului Ion a crescut un pom minune, în care am numărat 2023 de mere și 2022 de pere. În fiecare oră, bunicul culege două fructe din acest pom și imediat în pom mai apare crescut un nou fruct. Dacă bunicul rupe două fructe de același fel, atunci în pom crește o pară, iar dacă rupe două fructe diferite, atunci crește în pom un măr. Care este ultimul fruct din acest pom minune? Explicație.** **(7p)**

**3. Verificați dacă există cifrele** $a$ **și** $b$ **pentru care are loc egalitatea** $\overline{ab}^{51} = \overline{ba}^{68}$. **(7p)**

**Notă:**

*Toate subiectele sunt obligatorii.*
*Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.*
*Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.*
*Timp de lucru:* ***2 ore***.

V2

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Pitești, Jud. Argeș,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05

# Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
# 17 decembrie 2022 – Pitești
# Clasa a 5 – a

## BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

| **Problema 1: soluție orientativă** | **Punctaj** |
|---|---|
| **a)** $a = 2^{12n} + 2^{12n+4} + 2^{12n+3}$ | **1p** |
| $a = 2^{12n} \cdot 25$ | **1p** |
| $a = 2^{12n} \cdot 5^2$ | **1p** |
| $p = 4 \Rightarrow a \cdot p = 2^{12n} \cdot 5^2 \cdot 2^2$<br>$a \cdot p = (2^{6n} \cdot 5 \cdot 2)^2$ | **2p** |
| **b)** $q = 5 \Rightarrow a \cdot q = 2^{12n} \cdot 5^2 \cdot 5$<br>$a \cdot q = (2^{4n} \cdot 5)^3$ | **2p** |

| **Problema 2: soluție orientativă** | **Punctaj** |
|---|---|
| 2023 **mere** $\Rightarrow$ **număr impar de mere** | **1p** |
| **Se culeg două fructe de același fel, atunci crește o pară** $\Rightarrow$ **numărul merelor rămâne impar** | **2p** |
| **Se culeg două fructe diferite, atunci crește un măr** $\Rightarrow$ **numărul merelor rămâne impar** | **2p** |
| **Număr finit de pași, rămâne un număr impar de mere** | **1p** |
| 1 **este număr impar** $\Rightarrow$ **rămâne** 1 **măr** | **1p** |

| **Problema 3: soluție orientativă** | **Punctaj** |
|---|---|
| **Relația se mai scrie** $(\overline{ab}^3)^{17} = (\overline{ba}^4)^{17} \Leftrightarrow \overline{ab}^3 = \overline{ba}^4$ | **1p** |
| **Avem că** $\overline{ab} < 100 \Leftrightarrow \overline{ab}^3 < 10^6$ **și cum** $\overline{ab}^3 = \overline{ba}^4$, **obținem că** $\overline{ba}^4 < 10^6 \Leftrightarrow \overline{ba}^2 < 1000 \Leftrightarrow b \in \{1,2,3\}$ **(1)** | **2p** |
| **Revenim în relația** $\overline{ab}^3 = \overline{ba}^4$, **ultima cifră a numărului** $\overline{ba}^4$ **poate fi** $1, 5$ **sau** $6$; **prin urmare, ultima cifră a numărului** $\overline{ab}^3$**poate fi** $1, 5$ **sau** $6 \Rightarrow b \in \{1,5,6\}$ **(2)**<br>**Din (1) și (2) obținem că** $b = 1$ | **2p** |
| **Deci,** $\overline{a1}^3 = \overline{1a}^4 \Rightarrow a \in \{1,3,7,9\}$. **Cum** $11^3 \neq 11^4$, $31^3 \neq 13^4, 71^3 \neq 17^4, 91^3 \neq 19^4$ , **deducem că nu există cifre** $a$ **și** $b$ **cu proprietatea dată** | **2p** |

5/V2