9

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian"
17 decembrie 2022 - Pitești
Clasa a 9 - a

SUBIECTE

1. a) Să se determine cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii $A = \left\{ n + \left[\dfrac{2022}{n} \right] \middle| n = \overline{1,2022} \right\}$. **(3p)**

b) Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1,1 \\ \{x\} + y + [z] = 2,2 \\ [x] + \{y\} + z = 3,3 \end{cases}$. **(4p)**

2. Să se arate că dacă $a,b,c > 0$, atunci: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) + \dfrac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq 12$.

În ce situație este posibilă egalitatea? **(7p)**

3. Se consideră un patrulater convex *ABCD*, *O* intersecția diagonalelor sale, un număr real $a > 0$ și punctele $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CD), Q \in (DA)$ astfel încât

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|CP|}{|PD|} = \frac{|DQ|}{|QA|} = a.$$

a) Arătați că, dacă $a=1$, atunci $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$. **(3p)**

b) Arătați că, dacă $a \neq 1$ și $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$, atunci patrulaterul *ABCD* este paralelogram. **(4p)**

4. Arătați că pentru orice număr natural nenul N există $n \geq 1$ și $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-3,-1,1,3\}$ astfel încât $N = a_1 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 2^3 + \ldots + a_n \cdot n^3$. **(7p)**

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
*Timp de lucru: **3 ore**.*

9

Concursul Județean de matematică „Dan Barbilian”
17 decembrie 2022 – Pitești
Clasa a 9 – a

BAREM ORIENTATIV :

1.

a) $n + \left[\frac{2022}{n}\right] > n + \frac{2022}{n} - 1 \geq 2\sqrt{n \cdot \frac{2022}{n}} - 1 = 2\sqrt{2022} - 1 > 89 - 1 = 88$ **(1p)**

$n + \left[\frac{2022}{n}\right] \leq n + \frac{2022}{n}$. Cum $1 \leq n \leq 2022$ obținem $(n-1)(n-2022) \leq 0$, de unde rezultă că $n + \frac{2022}{n} \leq 2023$, deci $n + \left[\frac{2022}{n}\right] \leq 2023$ **(1p)**

Deci cel mai mic element din A este 89, obținut pentru n=44 sau n=45, iar cel mai mare element din A este 2023, obținut pentru n=1 sau n=2022 **(1p)**

b) Însumând cele trei ecuații obținem $x + y + z = 3{,}3$ $(*)$ **(1p)**

Scăzând din $(*)$ prima ecuație a sistemului, se obține $\{y\} + [z] = 2{,}2$, de unde $[z] = 2$și $\{y\} = 0{,}2$.

Scăzând din $(*)$ a doua ecuație a sistemului, se obține $\{z\} + [x] = 1{,}1$, de unde $[x] = 1$și $\{z\} = 0{,}1$.

Scăzând din $(*)$ a treia ecuație a sistemului, se obține $\{x\} + [y] = 0$, de unde $[y] = 0$și $\{x\} = 0$.

Deci $x = 1; y = 0{,}2; z = 2{,}1$ **(3p)**

2.

Inegalitatea se scrie $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + 3 + \frac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq 12 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq 9$. **(2p)**

Dar $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ (din inegalitatea mediilor), deci este suficient să arătăm că $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq 6$ **(1p)**

Avem $\frac{b^2}{ab} + \frac{c^2}{bc} + \frac{a^2}{ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$ (din inegalitatea Bergström sau din consecința inegalității Cauchy-Buniakovski-Schwarz), deci este suficient să arătăm că

$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq 6$ **(2p)**

Folosind inegalitatea mediilor avem$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq 2\sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\frac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}} = 6$ **(1p)**

cu egalitate dacă și numai dacă au loc egalități în toate inegalitățile aplicate, ceea ce revine, în final, la $a = b = c$ **(1p)**

3.

a) Dacă a=1⇒ M,N,P,Q sunt mijloacele laturilor $AB,BC,CD,DA,$ deci

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}); \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}); \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}); \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA})$ **(1p)**

$2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$și $2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$ **(1p)**

Obținem, astfel, $2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OQ}$, de unde rezultă $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$ **(1p)**

b) Relația din ipoteză duce la $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{a+1}\overrightarrow{OA} + \frac{a}{a+1}\overrightarrow{OB}$ și analoagele **(2p)**

$\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{v}$. Dacă $\vec{v} \neq \vec{0}$, atunci el este un vector care are direcția ambelor diagonale, ceea ce este fals. Deci $\vec{v} = \vec{0}$ **(1p)**

Dacă $\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow O$ este mijlocul diagonalelor patrulaterului *ABCD*, ceea ce face din acesta un paralelogram **(1p)**

4.

Pornim de la $(n+3)^3 - 3(n+2)^3 + 3(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 9n^2 + 27n + 27 - 3n^3 - 6n^2 - 12n - 24 + 3n^3 += 9n^2 + 9n + 3 - n^3 = 6$, pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci încercăm o inducție de pas 6 **(3p)**

Considerăm *P(N)*, $N \in \mathbb{N}^*$predicatul unar definit de cerință

I. *P(1)* este adevărată, deoarece $1 = 1 \cdot 1^3, \begin{cases} n = 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

P(2) este adevărată, deoarece $2 = (-1) \cdot 1^3 + (-3) \cdot 2^3 + 1 \cdot 3^3$

P(3) este adevărată, deoarece $3 = 3 \cdot 1^3, \begin{cases} n = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$

P(4) este adevărată, deoarece $4 = 1 \cdot 1^3 + (-3) \cdot 2^3 + 1 \cdot 3^3, \begin{cases} n = 3 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = -3 \\ a_3 = 1 \end{cases}$

P(5) este adevărată, deoarece$5 = (-3) \cdot 1^3 + 1 \cdot 2^3$

P(6) este adevărată, deoarece$6 = 3 \cdot 1^3 + (-3) \cdot 2^3 + 1 \cdot 3^3, \begin{cases} n = 3 \\ a_1 = 3 \\ a_2 = -3 \\ a_3 = 1 \end{cases}$ **(2p)**

II. Presupunem *P(k)* adevărată și arătăm că *P(k+6)* este adevărată, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$

Din *P(k)* adevărată rezultă scrierea $k = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot i^3$, cu $n = n(k) \in \mathbb{N}^*$ și $a_i \in \{\pm 1, \pm 3\}$, $i = \overline{1,n}$ este adevărată, de unde, folosind prima parte a soluției, se obține

$k + 6 = k + (-1) \cdot (n+1)^3 + 3 \cdot (n+2)^3 + (-3) \cdot (n+3)^3 + 1 \cdot (n+4)^3$ și, deci, *P(k+6)* este adevărată.

Cum $k \in \mathbb{N}^*$a fost arbitrar ales, obținem (din I. și II.), conform unei variante a metodei inducției matematice, că *P(N)* adevărată, $\forall N \in \mathbb{N}^*$ **(2p)**