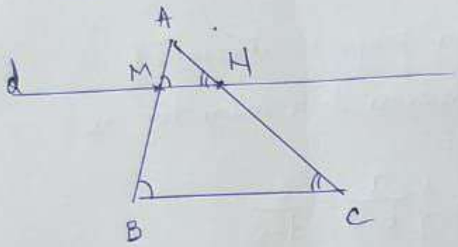
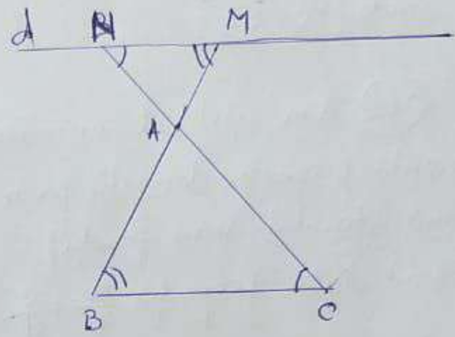
Teorema fundamentală a asemănării - Partea 1

Amintiri:



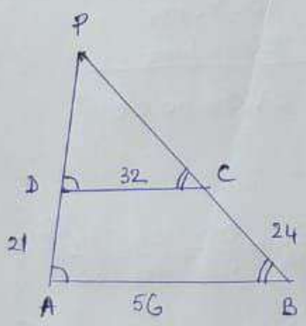


$$\boxed{MN \parallel BC \xRightarrow{T.F.A} \Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}}$$

APLICAȚII:

(I) PROBLEME DE BAZĂ:

(1)



Ip: ABCD - trapez
$AB \parallel CD$
$AB = 56$ cm
$CD = 32$ cm
$AD = 21$ cm
$BC = 24$ cm

C: PA, PB, PC, PD = ?

Dem:

Cum $DC \parallel AB \xRightarrow{T.F.A} \Delta PDC \sim \Delta PAB \Rightarrow \frac{PD}{PA} = \frac{PC}{PB} = \frac{DC}{AB} = \frac{32^{(8}}{56} = \frac{4}{7}$

Din $\frac{PD}{PA} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{PD}{PA-PD} = \frac{4}{7-4} \Leftrightarrow \frac{PD}{AD} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{PD}{21} = \frac{4}{3} \Rightarrow$

$\boxed{PD = 28} \Rightarrow \boxed{PA = 49}$

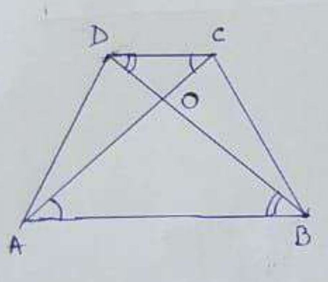
Din $\frac{PC}{PB} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{PC}{PB-PC} = \frac{4}{7-4} \Leftrightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{PC}{24} = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{PC=32}$,

de unde $\boxed{PB=56}$

OBS Am utilizat următoarea proporție derivată (numită proporție derivată prin scăderea din numitor a numărătorului unei fracții)

Fiind dată proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \\ \text{sau} \\ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{c} \end{cases}$

(2)



Ip: ABCD - trapez
AB ∥ CD
AB = 60cm
CD = 24 cm
AC = 42 cm
BD = 49cm

C: OA, OB, OC, OD = ?

Dem

Cum $DC \parallel AB \xrightarrow{T.F.A} \triangle OCD \sim \triangle OAB \Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} = \frac{24^{(12}}{60} = \frac{2}{5}$

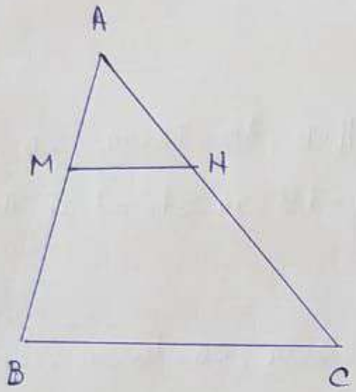
Din $\frac{OC}{OA} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{OC}{OC+OA} = \frac{2}{2+5} \Leftrightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{OC}{42} = \frac{2}{7} \Rightarrow \boxed{OC=12} \Rightarrow$

$\boxed{OA=30}$

Din $\frac{OB}{OD} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{OB}{OB+OD} = \frac{2}{2+5} \Leftrightarrow \frac{OB}{BD} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{OB}{49} = \frac{2}{7} \Rightarrow \boxed{OB=14} \Rightarrow$

$\boxed{OD=35}$

③



Ip. ΔABC
$AB = 30$ cm
$AC = 40$ cm
$BC = 27$ cm
$M \in AB$ a.î. $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$
$N \in AC$ a.î. $MN \parallel BC$

C: a) MNCB - trapez
b) $P_{\Delta AMN}, P_{MNCB} = ?$

Dem.

a) Cum $MB \cap NC = \{A\} \Rightarrow MB \nparallel NC$
Dar $MN \parallel BC$ $\Rightarrow$ MNCB - trapez

b) Cum $MN \parallel BC \xrightarrow{T.F.A} \Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (1)

Din ipoteză: $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MA}{MA+MB} = \frac{2}{2+3} \Leftrightarrow \boxed{\frac{MA}{AB} = \frac{2}{5}} \Leftrightarrow \frac{MA}{30} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow \boxed{MA = 12} \Rightarrow \boxed{MB = 18}$

Din (1), avem: $\frac{2}{5} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{AN}{40} = \frac{MN}{27}$

Din $\frac{2}{5} = \frac{AN}{40} \Rightarrow \boxed{AN = 16} \Rightarrow \boxed{NC = 24}$

Din $\frac{2}{5} = \frac{MN}{27} \Rightarrow \boxed{MN = 10{,}8}$

Atunci: $P_{\Delta AMN} = AM + AN + MN = 12 + 16 + 10{,}8 = 38{,}8$ cm

$P_{MNCB} = MB + BC + NC + MN = 18 + 27 + 24 + 10{,}8$
$= 79{,}8$ cm

TEMĂ:

① Trapezul $ABCD$ are bazele $AB \parallel CD$, $AB = 72\text{ cm}$, $CD = 32\text{ cm}$, iar diagonalele $AC = 65\text{ cm}$ și $BD = 78\text{ cm}$. Știind că $AC \cap BD = \{O\}$, calculați OA, OB, OC, OD.

② Trapezul $ABCD$ are bazele $AB = 28\text{ cm}$, $CD = 16\text{ cm}$, iar laturile neparalele $AD = 12\text{ cm}$ și $BC = 15\text{ cm}$. Știind că $AD \cap BC = \{M\}$, calculați MA, MB, MC, MD.

③ În triunghiul ABC cu $AB = 15\text{ cm}$, $AC = 30\text{ cm}$ și $BC = 25\text{ cm}$, se iau punctele $M \in AB$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{2}$ și $N \in AC$ astfel încât $MN \parallel BC$. Aflați $P_{\Delta AMN}$ și P_{MNCB}.