PIRAMIDA PATRULATERA REGULATA

- Are baza un patrat și muchiile laterale congruente.
- Teoremă. Dacă VABCD este piramidă regulată și VO $\perp$ (ABCD), atunciOA=OB=OC=OD=R (raza cercului circumscris pătratului ABCD).

-Între latura pătratului și R avem relația $l = R\sqrt{2}$.

-Dacă OM $\perp$ BC, OM este apotema bazei și OM=$\frac{AB}{2} = \frac{l}{2}$.

- Dacă VM $\perp$ BC, VMeste apotema piramidei.

-Aria laterală $A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$

-Aria totală $A_t = A_l + A_b$

-Volumul $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$.

Aplicație:

1.O piramidă patrulateră regulată VABCD, are latura bazei egală cu 12 cm și secțiunea diagonală echivalentă cu baza. Aflați:

a) înălțimea piramidei, apotema piramidei și muchia laterală;

b) aria laterală și volumul;

c) cosinusul unghiului format de fața laterală VBC cu planul bazei;

d) distanța de la centrul O al bazei la fața laterală (VBC);

e) distanța de la vârful A al bazei la fața laterală (VBC);

f) lungimea segmentului CN, dacă N este un punct pe muchia VC astfel încât aria triunghiului BND să fie minimă.

Soluție.

Secțiunea diagonală VAC este echivalentă cu baza înseamnă că

a) $A_{\Delta VAC} = A_{ABCD} . \Rightarrow \frac{AC \cdot VO}{2} = AB^2 \Rightarrow \frac{12\sqrt{2} \cdot VO}{2} = 144 \Rightarrow VO = 12\sqrt{2}$ cm.

MO $\perp$ BC $\Rightarrow OM = \frac{AB}{2} = 6$ cm.

ΔVOM dreptunghic $\Rightarrow VM^2 = VO^2 + OM^2 = 288 + 36 = 324 \Rightarrow VM = 18cm$.

ΔVOA dreptunghic $\Rightarrow VA^2 = VO^2 + OA^2 = 288 + 72 = 360 \Rightarrow VA = 6\sqrt{10}cm$.

b) $A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2} = \frac{48 \cdot 18}{2} = 432cm^2$

$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{144 \cdot 12\sqrt{2}}{3} = 576\sqrt{2}cm^3$.

c) $(VBC) \cap (ABCD) = BC$

$OM \perp BC, OM \subset (ABCD)$

$VM \perp BC, VM \subset (VBC), \Rightarrow \sphericalangle((VBC,(ABCD)) = \sphericalangle VMO$

ΔVOM dreptunghic $\Rightarrow \cos(\sphericalangle VMO) = \frac{OM}{VM} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

d) d(O, (VBC))

Ducem $OQ \perp VM$ și demonstrăm că $OQ \perp (VBC)$.

Din $BC \perp VM$ și $BC \perp OM \Rightarrow BC \perp (VOM)$, $OQ \subset (VOM) \Rightarrow BC \perp OQ$.

Deoarece $OQ \perp VM$ și $OQ \perp BC \Rightarrow OQ \perp (VBC) \Rightarrow OQ = d(O,(VBC))$

În ΔVOM dreptunghic, $OQ = \dfrac{VO \cdot OM}{VM} = \dfrac{12\sqrt{2} \cdot 6}{18} = 4\sqrt{2}$.

e) d(A, (VBC))

Ducem $AP \perp (VBC) \Rightarrow AP$ este înălțimea din vârful A pe baza VBC a piramidei AVBC.

$$V_{AVBC} = \frac{A_{\Delta VBC} \cdot AP}{3} = \frac{A_{\Delta ABC} \cdot VO}{3} \Rightarrow AP = \frac{A_{\Delta ABC} \cdot VO}{A_{\Delta VBC}} = \frac{72 \cdot 12\sqrt{2}}{108} = 8\sqrt{2} \text{ cm.}$$

f) Din $BD \perp AC$ și $BD \perp VO \Rightarrow BD \perp (VAC)$,

$$ON \subset (VAC) \Rightarrow BD \perp ON \Rightarrow A_{\Delta BND} = \frac{BD \cdot ON}{2} = 6\sqrt{2} \cdot ON.$$

$A_{\Delta BND} = 6\sqrt{2} \cdot ON$ este minimă $\Leftrightarrow ON \perp VC$.

În ΔVOC dreptunghic $\Rightarrow$ conform teoremei catetei $OC^2 = VC \cdot CN \Rightarrow 72 = 6\sqrt{10} \cdot CN$

$$CN = \frac{72}{6\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5} \text{ cm.}$$