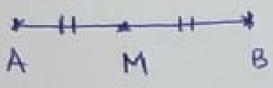
Medianele unui triunghi:

Amintiri! - Mijlocul unui segment



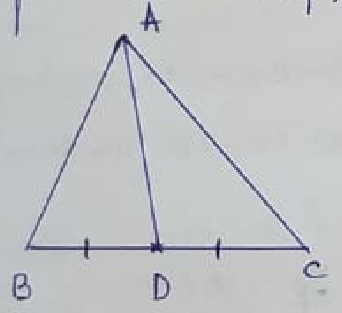
AB – segment, $M \in AB$, atunci M mijlocul segmentului AB

$$\Updownarrow$$

$$AM \equiv MB$$

Noțiunea de mediană în triunghi:

Definiție: Segmentul care unește vârful unui triunghi cu mijlocul laturii opuse acelui vârf, se numește mediană.



ΔABC, $D \in BC$, atunci AD – mediană

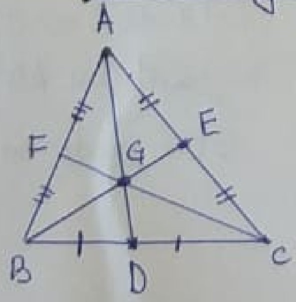
$$\Updownarrow$$

D – mijloc BC

Obs Orice triunghi are exact 3 mediane.

TEOREMĂ (de concurență a medianelor unui triunghi)

În orice triunghi medianele sunt concurente într-un punct G, numit centru de greutate al triunghiului.



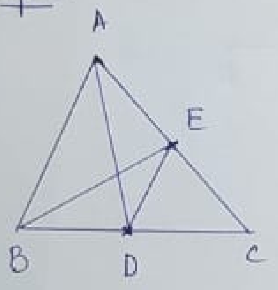
ΔABC; AD, BE, CF – mediane, atunci $AD \cap BE \cap CF = \{G\}$

Modalități prin care arătăm că un segment este mediana unui triunghi

I. Folosind definiția

Exemple

1)



Ip: ΔABC
AD - mediană în ΔABC
ED - mediană în ΔADC

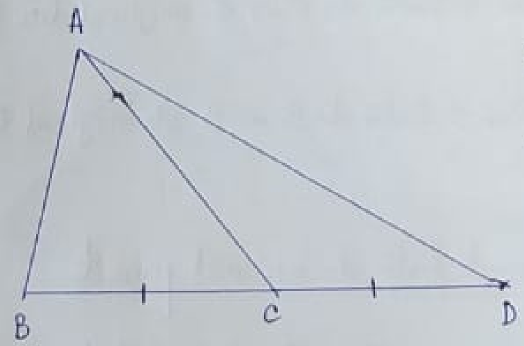
C: a) DE - mediană în ΔBEC
b) BE - mediană în ΔABC

Dem:

a) Cum AD - mediană în $\Delta ABC \Rightarrow D$ - mijloc $BC \Rightarrow DE$ - mediană în ΔBEC.

b) Cum ED - mediană în $\Delta ADC \Rightarrow E$ - mijloc $AC \Rightarrow BE$ - mediană în ΔABC.

2)

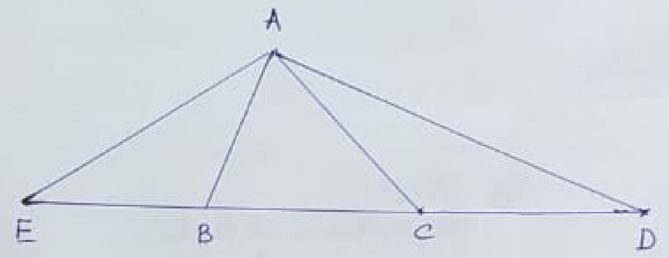


Ip: ΔABC
D - simetricul lui B față de C

C: AC - mediană în ΔABD

Dem: Cum D este simetricul lui B față de $C \Rightarrow C$ este mijlocul $BD \Rightarrow AC$ este mediană în ΔABD.

③



Ip: ΔABC
D - simetricul lui B față de C
E - simetricul lui C față de B.

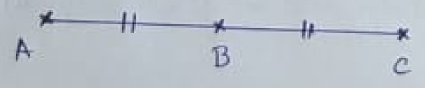
C: a) AC - mediană în ΔABD
b) AB - mediană în ΔAEC

Dem:

a) Cum D este simetricul lui B față de C => C - mijlocul lui BD => AC - mediană în ΔABD

b) Cum E este simetricul lui C față de B => B este mijlocul lui EC => AB - mediană în ΔAEC.

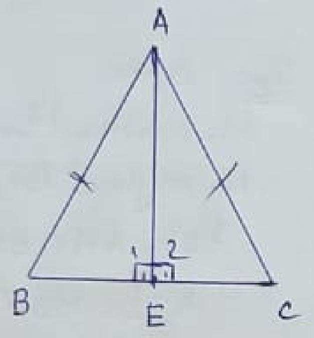
OBS <u>Simetricul unui punct față de un alt punct</u>



Simetricul punctului A față de punctul B, este punctul C, astfel încât:

a) A, B, C - coliniare în această ordine
b) B - mijlocul lui AC.

(4)



Ip: ΔABC - isoscel de bază BC

AE - înălțime

$E \in BC$

C: AE - mediană în ΔABC

Dem.

Cum ΔABC isoscel de bază $BC \Rightarrow AB \equiv AC$.

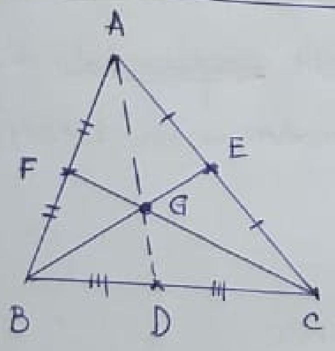
Cum AE - înălțime în $\Delta ABC \Rightarrow \sphericalangle E_1 \equiv \sphericalangle E_2 = 90^\circ$.

În ΔAEB și ΔAEC (drept), avem:

$$\left.\begin{array}{l} - AB \equiv AC \\ - AE \equiv AE \end{array}\right\} \xrightarrow{I.C} \Delta AEB \equiv \Delta AEC \Rightarrow BE \equiv CE \Rightarrow E\text{- mijloc } BC \Rightarrow$$

AE - mediană în ΔABC.

(II) Folosind teorema de concurență a medianelor



Ip: ΔABC

BE, CF - mediane

$E \in AC$, $F \in AB$

C: A, G, D - coliniare, unde D - mijloc BC.

Dem:

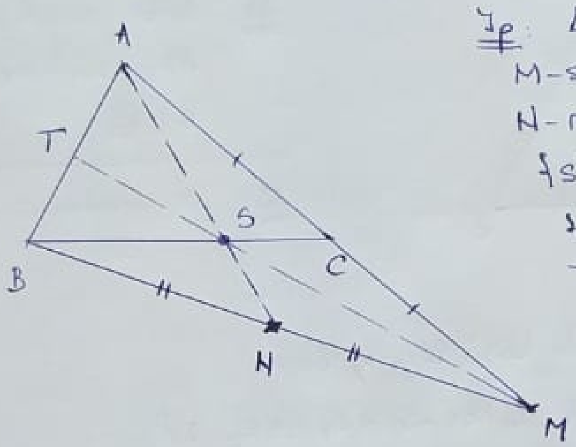
În ΔABC, avem:

$$\left.\begin{array}{l} BE, CF \text{ - mediane} \\ BE \cap CF = \{G\} \end{array}\right\} \Rightarrow G\text{ - centru de greutate în } \Delta ABC$$

și ținând cont că medianele unui triunghi sunt concurente $\Rightarrow A, G, D$ sunt coliniare, adică AD este mediană

=> <u>Exemple</u>:

①



Ip: $\triangle ABC$

M – simetricul lui A față de C

N – mijlocul lui MB

$\{S\} = AN \cap BC$

$\{T\} = MS \cap AB$

C: $TA \equiv TB$

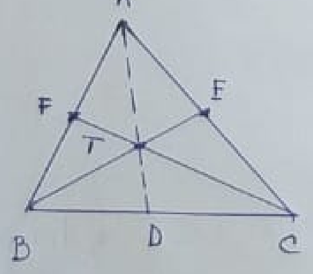
<u>Dem</u>:

Cum M este simetricul lui A față de C => C – mijloc AM => BC – mediana în $\triangle ABM$.

Avem: BC – mediană în $\triangle ABM$; AN – mediană în $\triangle ABM$; $BC \cap AN = \{S\}$ } => S ~~est~~ centru de greutate în $\triangle ABM$ => MT – mediană în $\triangle ABM$ =>

T – mijloc AB => $TA \equiv TB$

②



Ip: $\triangle ABC$

E – mijloc AC

F – mijloc AB

$BE \cap CF = \{T\}$

$AT \cap BC = \{D\}$

C: $BD \equiv CD$

<u>Dem</u>: Cum E – mijloc AC => BE – mediană în $\triangle ABC$; F – mijloc AB => CF – mediană în $\triangle ABC$; Dar $BE \cap CF = \{T\}$ } => T – centru de greutate în $\triangle ABC$

$\Rightarrow$ AD - mediană în $\triangle ABC \Rightarrow$ D - mijloc BC $\Rightarrow BD \equiv DC$.