VIII

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 1 februarie 2020
Clasa a VIII – a

SUBIECTE:

1. a) Arătați că $a^2+b^2 \geq 2ab$, oricare ar fi numerele $a,b \in \mathbb{R}^*, a,b>0$. **(2 p)**

(***)

b) Fie $x, y, z > 0$ numere reale cu $xyz=6$. Arătați că

$$\frac{2x}{(2x^2+y^2)(x^2+2z^2)}+\frac{3y}{(3y^2+z^2)(y^2+3x^2)}+\frac{5z}{(5z^2+x^2)(z^2+5y^2)} \leq \frac{1}{8}.$$ **(5 p)**

(G.M. Nr.11/2017)

2. Fie numerele reale *x, y, z,* care satisfac relațiile:

$$(x-\sqrt{2020})(x+\sqrt{2020})+\sqrt{2018}\cdot y\cdot(2x+\sqrt{2018}\cdot y)=2019\cdot z^2 \text{ și}$$

$$x+\sqrt{2018}\cdot y+\sqrt{2019}\cdot z=1010.$$

Arătați că $x+\sqrt{2018}\cdot y-\sqrt{2019}\cdot z$ este număr prim. **(7 p)**

(Enunț prelucrat – ONM 2013)

3. O prismă dreaptă ABCA'B'C' are bazele triunghiuri echilaterale cu latura de lungime a. Știind că dreptele AB' și BC' sunt perpendiculare, să se afle :

a) lungimea muchiei laterale; **(4 p)**

b) o funcție trigonometrică a unghiului format de planele (BMC') și (ABC), unde M este mijlocul muchiei [AC]. **(3 p)**

(***)

4. Prin vârfurile A, B, C ale paralelogramului ABCD se consideră dreptele paralele a, b respectiv c. De aceeași parte a planului (ABC), pe dreptele a, b, c, se iau punctele A', B', C', astfel încât lungimile segmentelor [AA'], [BB'], [CC'], exprimate în unități de lungime, să fie egale cu:

$$AA' = \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{1\cdot 2}}}+\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{2\cdot 3}}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}},\ n\in\mathbb{N}^*,\ BB' = \sqrt{2021} \text{ și } CC' = 1.$$

Determinați n astfel încât $D \in (A'B'C')$. **(7 p)**

Învățând matematică, înveți să gândești. Nicio problemă nu are granițe. Orice răspuns, are multe.
(Grigore Moisil)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.