Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 1 februarie 2020
Clasa a VII – a

7

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1 – Soluţie orientativă:		**Punctaj**
a)	Fie $\sqrt{\frac{x-2010}{x+1}}=$ k, k număr întreg $\Leftrightarrow \frac{x-2010}{x+1}=k^2$	**1p**
	$1-\frac{2011}{x+1}=k^2\in Z \Leftrightarrow \frac{2011}{x+1}\in Z \Leftrightarrow$ x + 1 ∈ {–2011; –1; 1; 2011}	**1p**
	x ∈ {–2012; –2; 0; 2010}. Verificând în relaţia iniţială, obţinem x = 2010	**1p**
b)	Cum a_i impar $\Rightarrow a_i^2 = 4k_i + 1$	**1p**
	$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2020}^2 - 1 = 4(k_1+k_2+\ldots+k_{2020}) + 2020 - 1 = M_4 + 3$	**1p**
	Dar nu există pătrat perfect forma $M_4 + 3$ Deci $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2020}^2 - 1$ nu este p.p. $\Rightarrow$ A iraţional	**2p**

Problema 2 – Soluţie orientativă:		**Punctaj**
a)	Pentru ca radicalii să fie definiţi, este necesar ca $0 \le x \le 2012$	**1p**
	Raţionalizând, obţinem: $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1006}}{x-1006}+\frac{\sqrt{2012-x}-\sqrt{1006}}{2012-x-1006}=\frac{2\left(\sqrt{2012-x}-\sqrt{x}\right)}{2012-2x}$	**1p**
	Dacă $x\neq 1006$, obţinem: $\sqrt{1006}-\sqrt{x}+\sqrt{2012-x}-\sqrt{1006}=\sqrt{2012-x}-\sqrt{x}$, relaţie verificată pentru orice valoare întreagă a lui x. În acest caz, avem soluţiile: 0, 1, 2, 3, ..., 1005, 1007, 1008, ..., 2012.	**1p**
	Prin verificare directă în ecuaţia iniţială obţinem că şi 1006 este soluţie. Deci, mulţimea soluţiilor întregi ale ecuaţiei date este $\{0,1,2,3,\ldots,2012\}$, în total 2013 soluţii.	**1p**
b)	$b-a=\frac{64-63}{1}+\frac{63-62}{2}+\frac{62-61}{3}+\ldots+\frac{2-1}{63}+\frac{1}{64}$ $b-a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{63}+\frac{1}{64}$	**1p**
	$b-a=(1+\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16})+(\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{32})+(\frac{1}{33}+\ldots+\frac{1}{64})$	**1p**
	$1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ $\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{32}>16\cdot\frac{1}{32}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{33}+\ldots+\frac{1}{64}>32\cdot\frac{1}{64}=\frac{1}{2}$ Adunând aceste relaţii, obţinem $b-a>6\cdot\frac{1}{2}=3$	**1p**

	Problema 3 – Soluție orientativă:	Punctaj
a)	ΔAMP≡ΔCNQ, deoarece $AM = CN$, $AP = CQ$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ (L.U.L) $\Rightarrow$ MP = NQ (1)	1p
	ΔDMQ≡ΔNBP, deoarece $DM = BN$, $DQ = BP$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$ (L.U.L) $\Rightarrow$ MQ = PN (2)	1p
	Din (1) și (2), obținem că patrulaterul $MPNQ$ este un paralelogram, de unde concluzia	1p
b)	Din punctul a), obținem că: $d(M, AB) = d(N, CD) = h_1$ și $d(M, CD) = d(N, AB) = h_2$	1p
	Notăm $AP = CQ = x$ și $BP = DQ = y$. Avem: $2 \cdot A_{\triangle AMP} + 2 \cdot A_{\triangle DMQ} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD} \Rightarrow 4 \cdot \left(A_{\triangle AMP} + A_{\triangle DMQ}\right) = A_{ABCD}$ $\Rightarrow 2 \cdot (x \cdot h_1 + y \cdot h_2) = (h_1 + h_2) \cdot (x + y)$ $\Leftrightarrow x \cdot h_1 + y \cdot h_2 = y \cdot h_1 + x \cdot h_2 \Leftrightarrow (x - y) \cdot (h_1 - h_2) = 0.$	1p
	Dacă $x = y \Rightarrow P$ este mijlocul lui AB	1p
	Dacă $h_1 = h_2$, construim $ME \perp AB, E \in AB$ și $MF \perp CD, F \in CD$. Se arată că $\triangle MAE \equiv \triangle MDF$ (C.U), de unde M este mijlocul lui AD.	1p

Problema 4 – Soluție orientativă:	Punctaj
$\left.\begin{array}{l} \measuredangle ABC = 60^0 \\ O \in AD,\ AD\ inaltime \Rightarrow AD\ mediatoarea\ segmentului\ BC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC\ echilateral$	2p
Fie DP ∥ BE, P $\in$ CE $\Rightarrow$ P mijloc CE	1p
PM linie mijlocie în ΔDEC $\Rightarrow$ MP ∥ DC $\Rightarrow$ MP $\perp$ AD	2p
M ortocentrul ΔADP $\Rightarrow$ AM $\perp$ DP $\Rightarrow$ AM $\perp$ BE	2p

Notă:
Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.
Se acordă numai punctaje întregi.