Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 1 februarie 2020
Clasa a V – a

5

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1- Soluție orientativă:	**Punctaj**
Din argumentarea 999+27+9 < 2030 rezultă că n are 4 cifre deci $n = \overline{abcd}$.	**1p**
Din datele problemei obținem: $\overline{abcd} + a + b + c + d + d = 2030 \Rightarrow$	**1p**
$\Rightarrow 1000a + 100b + 10c + d + a + b + c + 2d = 2030 \Rightarrow$	**1p**
$\Rightarrow 1001a + 101b + 11c + 3d = 2030 \Rightarrow a \in \{1,2\}$	**1p**
$a = 1 \Rightarrow 101b + 11c + 3d = 1029 \Rightarrow b = 9$ și $11c + 3d = 120 \Rightarrow$ $\Rightarrow c = 9$ și $d = 7 \Rightarrow \overline{abcd} = 1997$	**1p**
$a = 2 \Rightarrow 101b + 11c + 3d = 28 \Rightarrow b = 0$	**1p**
$11c + 3d = 28 \Rightarrow c = 2$ și $d = 2 \Rightarrow \overline{abcd} = 2022$	**1p**

Problema 2- Soluție orientativă:		**Punctaj**
a)	Condiție $a \neq 0$. Folosind Teorema împărțirii cu rest $a = c \cdot b + 1, 1 < b \Rightarrow b \in \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$	**1p**
	Caz $b = 2 \Rightarrow a = c \cdot 2 + 1 \Rightarrow a \in \{1,3,5,7,9\}$ de unde $\overline{ab} \in \{12,32,52,72,92\}$ Caz $b = 3 \Rightarrow a = c \cdot 3 + 1 \Rightarrow a \in \{1,4,7\}$ de unde $\overline{ab} \in \{13,43,73\}$ Caz $b = 4 \Rightarrow a = c \cdot 4 + 1 \Rightarrow a \in \{1,5,9\}$ de unde $\overline{ab} \in \{14,54,94\}$	**1p**
	Caz $b = 5 \Rightarrow a = c \cdot 5 + 1 \Rightarrow a \in \{1,6\}$ de unde $\overline{ab} \in \{15,65\}$ Caz $b = 6 \Rightarrow a = c \cdot 6 + 1 \Rightarrow a \in \{1,7\}$ de unde $\overline{ab} \in \{16,76\}$ Caz $b = 7 \Rightarrow a = c \cdot 7 + 1 \Rightarrow a \in \{1,8\}$ de unde $\overline{ab} \in \{17,87\}$	**1p**
	Caz $b = 8 \Rightarrow a = c \cdot 8 + 1 \Rightarrow a \in \{1,9\}$ de unde $\overline{ab} \in \{18,98\}$ Caz $b = 9 \Rightarrow a = c \cdot 9 + 1 \Rightarrow a \in \{1\}$ de unde $\overline{ab} \in \{19\}$ ÎN TOTAL 20 DE SOLUȚII	**1p**
b)	Pătratul de 12 x 12 se poate împărți în 16 pătrate de 3 x 3.	**1p**
	A arăta că există cel puțin un număr 1 care are toți vecinii săi (pe linie, pe coloană și pe diagonală) egali cu 1, revine la a arăta că există cel puțin un pătrat de 3 x 3 care nu conține niciun număr egal cu 0.	**1p**
	Cum noi avem doar 15 numere egale cu 0 și 16 pătrate de 3 x 3, rezultă că va exista cel puțin un pătrat de 3 x 3 care nu are niciun număr egal cu 0 și demonstrația este încheiată.	**1p**

Problema 3- Soluție orientativă:		**Punctaj**
a)	Avem a= $51 = 10^2 - 7^2$ și b= $2601 = 85^2 - 68^2$.	**1p**
b)	Din a) observăm că b= 51^2.	**1p**
	În continuare studiem cazurile n impar și n par.	**1p**
	Dacă $n = 2k+1, k \in \mathbf{N}$ obținem: $51^{2k+1} = 51^{2k} \cdot 51 = 51^{2k}\left(10^2 - 7^2\right) = (51^k \cdot 10)^2 - (51^k \cdot 7)^2 = x^2 - y^2$.	**2p**

	Dacă $n = 2k+2, k \in \boldsymbol{N}$ obținem: $51^{2k+2} = 51^{2k} \cdot 51^2 = 51^{2k}\left(85^2 - 68^2\right) = (51^k \cdot 85)^2 - (51^k \cdot 68)^2 = p^2 - q^2$.	**2p**

Problema 4- Soluție orientativă:		**Punctaj**
a)	METODA ARITMETICĂ 42 42 42 .... 42 42 42 42 42 42 + 110 50 50 50 .... 50 __ __ __ __ __ (5 cutii goale)	**1p**
	$42 \cdot 5 + 110 = 320$ cărți care vor fi redistribuite $320 : 8 = 40$ cutii, deci în total număr de cutii = 45	**2p**
	$40 \cdot 50 = 2000$ cărți	**1p**
b)	Dacă alegem 11 cărți etichetate cu numere (deci 11 numere), dacă acestea toate ar avea ultimele cifre distincte, ar trebui să avem 11 resturi la împărțirea prin 10.	**1p**
	Cum la împărțirea prin 10 avem resturile 0, 1, 2, ... , 9 (deci 10 resturi posibile), există minimum două resturi care se repetă, deci există cel puțin două cărți care au pe etichetă numere cu aceeași cifră la final.	**2p**

Notă:
Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.
Se acordă numai punctaje întregi.